Шкільняк Степан Степанович, д.ф.-м.н, професор

НЕТРАДИЦІЙНІ ТА ПРОГРАМНО-ОРІЄНТОВАНІ ЛОГІКИ В КУРСІ «МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА»

Робота присвячена опису програми навчальної дисципліни «Математична логіка» для студентів спеціальності F3 «Комп'ютерні науки» освітньо-професійної програми «Інформатика». Характерною ознакою цієї програми є приділення особливої уваги нетрадиційним логікам – багатозначним, модальним, темпоральним, епістемічним, програмно-орієнтованим логікам часткових квазіарних предикатів. Розширення сфери застосування математичної логіки зумовлює залучення до практичного використання все нових і нових її розділів. Це обґрунтовує включення відповідних тем до робочої програми навчальної дисципліни «Математична логіка». В роботі стисло описано зміст тем, пов'язаних з нетрадиційними логіками. Ознайомлення з такими логіками та можливостями їх практичного застосування дуже важливе для формування висококваліфікованих фахівців в галузі інформатики.

Ключові слова: багатозначна логіка, модальна логіка, темпоральна логіка, епістемічна логіка, логіка часткових квазіарних предикатів

The paper outlines the syllabus for the «Mathematical Logic» course designed for students majoring in «Computer Science» (specialty F3) within the «Informatics» educational-professional program. A distinctive feature of this syllabus is the special emphasis placed on non-traditional logics – such as many-valued, modal, temporal, and epistemic logics, as well as program-oriented logics of partial quasiary predicates. The expanding scope of mathematical logic's application necessitates the practical utilization of an ever-growing number of its branches. This justifies the inclusion of relevant topics in the syllabus of the «Mathematical Logic» course. This paper briefly outlines the content of topics related to non-traditional logics. Familiarity with such logics and their potential practical applications is crucial for training highly qualified specialists in the field of computer science.

Keywords: many-valued logic, modal logic, temporal logic, epistemic logic, logic of partial quasiary predicates

Вступ

Логіка тісно пов'язана з інформатикою та програмуванням. В основі схемотехніки комп'ютерів лежить апарат математичної логіки (алгебра логіки). Саме в межах математичної логіки запропоновано перші формалізації поняття алгоритму, мови програмування базуються на тих чи інших уточненнях цього поняття.

Розвиток інформаційних технологій та їх проникнення в усі сфери діяльності людини веде до невпинного розширення сфери застосування математичної логіки. Апарат математичної логіки належить до базових засобів моделювання різноманітних предметних областей, він є основою сучасних систем штучного інтелекту, інформаційних і програмних систем (див., напр., [1; 2]).

Розмаїття задач, для розв'язку яких використовується математична логіка, зумовлює залучення до практичного використання все нових і нових її розділів. Особливе місце серед них посідають нетрадиційні логіки. В першу чергу серед них можна виділити багатозначні логіки, модальні логіки, програмно-орієнтовані логіки часткових квазіарних предикатів (див., напр., [2–6]). Ознайомлення з такими логіками та можливостями їх практичного застосування дуже важливе для формування фахівців з інформаційних технологій. Тому робоча програма навчальної дисципліни «Математична логіка» (див. [7]) включає відповідні теми.

Програмно-орієнтовані логіки часткових квазіарних предикатів

На даний момент розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в інформатиці. Основою цих систем зазвичай виступає класична логіка. Проте ця логіка має принципові обмеження, що ускладнює її використання. Класична логіка недостатньо враховує структурованість, неповноту, частковість інформації про предметну область. Тому набуває актуальності задача побудови нових, програмно-орієнтованих логік. Таку побудову природно вести на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Логіки, побудовані на основі такого підходу, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Передумовою виникнення цих логік стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв’язку нових задач штучного інтелекту та інформатики. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними. Тому КНЛ називають логіками квазіарних предикатів.

Основні поняття і визначення, пов'язані з квазіарними функціями і предикатами та засобами їх побудови висвітлені в першій частині дисципліни. Такі засоби трактуються як алгебраїчні операції над предикатами – композиції. Такими є традиційні логічні зв'язки і квантори, а також композиції реномінації (перейменування), суперпозиції та спеціальні предикати і композиції рівності. Обґрунтовано необхідність побудови програмно-орієнтованих логік. Наведено спектр логік квазіарних предикатів. Також розглянуто реномінативні й безкванторні логіки. Описано семантичні моделі та мови цих логік.

Друга частина дисципліни присвячена логікам першого порядку. Окрім класичних логік першого поряду, розглядаються першопорядкові логіки монотонних (еквітонних) предикатів. Такі логіки зберігають основні властивості класичної логіки при істотному розширенні класу семантичних моделей, тому їх названо неокласичними. Для цих логік визначається відношення неспростовнісного логічного наслідку для пар формул та для пар множин формул, наводяться властивості цього відношення. Описуються нормальні форми для формул мови неокласичних логік.

В третій частина дисципліни розглядаються числення логік першого порядку. Для класичних логік описуються числення Гільбертівського типу, розглядаються фундаментальні поняття несуперечливості та повноти, теорема Ґьоделя про повноту та її наслідки. Для класичних логік розглянуто найпопулярніший метод пошуку виведень – метод резолюцій, також описано числення Ґенценівського типу – секвенційні числення. В некласичних логіках метод резолюцій не працює, тому ефективний пошук виведень в неокласичних логіках дають змогу робити саме секвенційні числення. Розглядаються приклади побудови виведень в секвенційних численнях, для таких числень доводяться теореми про побудову контрмоделі, теореми коректності та повноти.

Четверта частина дисципліни цілком присвячена некласичним логікам. Розглядаються першопорядкові логіки квазіарних предикатів без обмежень монотонності. Описуються різновиди квазіарних предикатів, визначаються їх мови та класи інтерпретацій (семантики). Вводиться низка відношень логічного наслідку $^{P}|=_{IR}$, $^{P}|=_{T}$, $^{P}|=_{F}$, $^{P}|=_{TF}$, $^{R}|=_{TF}$ для пар формул та для пар множин формул, визначаються властивості цих відношень та співвідношення між ними. Також розглядаються логіки вищих порядків, інтуїціоністські логіки. Особлива увага приділена багатозначним логікам та логікам модального типу.

Багатозначні логіки

Традиційні логіки двозначні, або бівалентні: множина істиннісних значень таких логік двоелементна. Цю множину традиційно позначають $\{T, F\}$; також її позначають $\{1, 0\}$.

Багатозначні логіки вперше з'явились на початку 20 ст. В 1920 році Ян Лукасєвич на основі аналізу Арістотелевої проблеми про істиннісний статус майбутніх подій прийшов до висновку, що принцип бівалентності для цього не підходить. Він вводить *третє* істиннісне значення, трактоване як "нейтрально", "невизначено", пізніше як "можливо". Далі Я. Лукасєвич визначає логічні зв'язки 3-значної логіки **Ł3** :

Опис модальних висловлень за допомогою 3-значної логіки виявився не зовсім адекватним, далі розвиток модальних логік пішов іншими шляхами. Найважливішим є той факт, що Я. Лукасєвич довів саму ***можливість*** існування некласичних логік, що за значимістю сумірне з відкриттям неевклідових геометрій.

В 1921 р. Е. Пост запропонував низку *n*-значних логік $\mathbf{P_n}$. На відміну від підходу Я. Лукасєвича, це було зроблено формально, без семантичного обґрунтування. Пост зробив припущення, що логічні функції (предикати) визначені й набувають значення на *n*-елементній множині $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. При цьому Поста не цікавив логічний смисл виразу ″значення t_k″. Зазвичай $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ – це $\{0, 1, \ldots, n–1\}$. При $n = 2$ логіка $\mathbf{P_n}$ стає класичною пропозиційною логікою $\mathbf{C_2}$.

Пост запропонував два варіанти заперечення – традиційне $\neg_P$ (як у Лукасєвича) і циклічне $\sim_P$. Основною властивістю логік P_n з базовими зв'язками $\vee_P$ та циклічним $\sim_P$ є їх функціональна повнота: через $\vee_P$ та $\sim_P$ можна виразити кожну функцію *n*-значої логіки.

До найвідоміших 3-значних належать сильна логіка Кліні $\mathbf{K_3}$ та слабка логіка Кліні $\mathbf{K_3^w}$. Вони запропоновані для використання в теорії рекурсії. Сильна логіка Кліні застосовується в системах алгоритмічних алгебр, мовах табличних баз даних.

Логічні зв'язки сильної логіки Кліні фактично такі ж, як логічні зв'язки традиційної (бівалентної) логіки часткових однозначних предикатів.

Цікавою є 3-значна логіка Бочвара (логіка абсурду): тут третє істиннісне значення трактується як "беззмістовно". Це фактично слабка логіка Кліні, розширена так званими зовнішніми логічними зв'язками, в яких для результатів ототожнено хибність та беззмістовність.

Серед 3-значних варто відзначити проміжні логіки Кліні $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ (**Lisp**) та $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$, логіку Гейтінга-Ґьоделя $\mathbf{G_3}$, низку параконсистентних логік.

Найвідомішими параконсистентними 3-значними логіками є $\mathbf{K_3^2}$ та **PCont**. $\mathbf{K_3^2}$ – це Клінієва $\mathbf{K_3}$ з виділеними істиннісними значеннями $\{T, \perp\}$.

Параконсистентність означає, що не діє закон ex falso quodlibet, тому не завжди маємо $A, \neg A \models B$. -Це дає змогу будувати нетривіальні теорії із суперечливою інформацією.

Проміжні логіки Кліні $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ та $\mathbf{K_3^{\leftarrow}}$ цікаві ти, що в них логічні зв'язки $\vee$ та & стають не комутативними .

Цікавим є той факт, що різні мови програмування використовують різні логіки: $\mathbf{K_3}$ – це логіка Prolog, $\mathbf{K_3^w}$ – це логіка Pascal; $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ – логіка Lisp.

Дослідження 4-значних логік започаткував Я. Лукасєвич. Найцікавішою з них є ***Ł-модальна*** логіка, базована на логіці $\mathbf{C_4}$.

Особливої уваги серед 4-значних заслуговує логіка Белнапа $\mathbf{B_4}$. Це зумовлено її застосуванням для опису інформаційних систем із неповною та суперечливою інформацією

Варто відзначити особливу роль логіки Клвні $\mathbf{K_3}$ серед 3-значних логік та логіки Белнапа $\mathbf{B_4}$ серед 3-значних: алгебра Кліні логіки $\mathbf{K_3}$ ізоморфна алгебрі часткових однозначних бівалентних предикатів; алгебра Белнапа логіки $\mathbf{B_4}$ ізоморфна алгебрі часткових неоднозначних бівалентних предикатів реляційного типу.

Якщо множина істиннісних значень нескінченна, то логіку називають *нескінченнозначною*. Такі логіки запропонував Я. Лукасєвич, він розглядав можливість градації істиннісн значень від 0 до 1 з неперервного інтервалу [0, 1] (зліченнозначні та континуальні логіки). Цей підхід привів до ймовірнісних та до нечітких логік .

Поширеним різновидом нескінченнозначних логік є узагальнення класичної бівалентної $\mathbf{C_2}$ на неперервний інтервал істиннісних значень [0, 1].

Логічні зв'язки такої нескінченнозначної логіки $\mathbf{C_\infty}$ вводяться так:

$$\neg_{\mathbf{c}} P = 1 - P; \qquad P \rightarrow_{\mathbf{c}} Q = \max(1 - P, Q);$$

$$P \vee_{\mathbf{c}} Q = \max(P, Q); \qquad P \,\&_{\mathbf{c}}\, Q = \min(P, Q)$$

Модальні логіки

На відміну від традиційних логік, які орієнтовані на опис одного конкретного стану світу, модальні логіки враховують можливість його зміни і розвитку, що дає змогу застосовувати модальні логіки для аналізу та моделювання різноманітних аспектів діяльності людини. Тому модальні логіки в останній час мають велике застосування в прикладних галузях, найперше це темпоральні логіки та епістемічні логіки. Темпоральні логіки застосовуються для опису та моделювання складних динамічних систем,

специфікації та верифікації програм; епістемічні логіки використовуються в системах штучного інтелекту та інформаційних системах, в експертних системах.

Розглядаються основні різновиди модальних логік: атлетичні, темпоральні, епістемічні, а також деонтичні. Описуються мови цих різновидів модальних логік на пропозиційному рівні, особлива увага приділена реляційній семантиці цих логік (семантика можливих світів). Наводяться аксіоматичні системи атлетичних, темпоральних, епістемічних логік пропозиційного рівня. Розглядається зв'язок між модальними аксіомами та властивостями відношення досяжності на світах.

Виділяються різновиди темпоральних логік: лінійні (ЛТЛ) та розгалужені (РТЛ), описуються аксіоматичні системи пропозиційної ЛТЛ. Відзначається роль темпоральних логік для специфікації та верифікації програм.

Розглядаються системи епістемічної логіки знання з одним агентом (експертом) знання та мультиагентні (мультиекспертні) системи. Відзначається роль епістемічних логік для розробки мультиагентних систем штучного інтелекту, здатних ефективно координувати дії та приймати рішення.

Можливості класичних модальних логік та логік часткових квазіарних предикатів поєднують транзиційні модальні логіки часткових квазіарних предикатів, вони враховують аспект зміни та розвитку предметних областей. Семантичною основою таких логік є транзиційні модальні системи (ТМС).

Виділяються різновиди транзиційних модальних систем: загальні, темпоральні, мультимодальні. Описуються мови першопорядкових ТМС, дається визначення формули та відображення інтерпретації. Досліджується взаємодія модальних композицій $\Box$ та $\Diamond$ із реномінаціями та кванторами . Взаємодія $\Box$ та $\Diamond$ із кванторами буде різною для ТМС еквітонних предикатів та ТМС предикатів без обмежень еквітонності.

Висновки

Розширення сфери застосування математичної логіки зумовлює необхідність забезпечення належного рівня викладання цієї дисципліни із врахуванням останніх наукових досягнень в галузі математичної логіки, адаптації матеріалу до потреб інформатики та штучного інтелекту .

Навчальна дисципліна «Математична логіка» дає змогу набути баз ові знання цієї галузі науки, знати основні поняття, засоби і методи математичної

логіки, їх застосування в штучному інтелекті, інформатиці й програмуванні; мати сучасні уявлення про основні методи пошуку доведень та засоби логічного виведення. Все нові розділи математичної логіки залучаються до практичного використання, тому в програмі навчальної дисципліни особлива увага приділена нетрадиційним логікам – багатозначним, модальним, темпоральним, епістемічним, програмно-орієнтованим логікам часткових квазіарних предикатів. Оволодіння основними поняттями і методами математичної логіки та можливостями їх практичного застосування вкрай важливе для формування висококваліфікованих фахівців в галузі інформатики.

Список використаних джерел

1. S. Abramsky, D.M. Gabbay and T.S.E. Maibaum (eds), Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 1-5, Oxford University Press, 1993-2000.
2. M. Huth and M. Ryan, Logic in Computer Science, Second Edition, Cambridge University Press, 2004.
3. J.-J. Ch. Meyer, W. Van der Hoek, Epistemic logic for AI and Computer Science, Cambridge University Press, 2009.
4. V. Goranko, Temporal Logics, Cambridge University Press, 2023.
5. Шкільняк С.С. Математична логіка. Приклади й задачі. Навчальний посібник. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2022. – 304 с.
6. Шкільняк С.С. Програмно-орієнтовані логіки квазіарних предикатів. Навчальний посібник. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2025. – 423 с.
7. Шкільняк С.С. Робоча програма навчальної дисципліни «Математична логіка» для студентів спеціальності F3 «Комп'ютерні науки», освітня програма «Інформатика». – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2026. – 11 с.